УДК 532.517.2:621.186.1

Турик Володимир Миколайович, канд. техн. наук, доцент

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

ORCID: <https://orcid.org/0000–0002–2357–4483>

**ЕКСТРЕМАЛЬНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ПРОФІЛЮ ШВИДКОСТІ ПРИ ЛАМІНАРНОМУ РУСІ РІДИНИ В КРУГЛІЙ ТРУБІ**

Більшість задач тепломасообміну і хімічної технології, пов’язаних з питаннями механіки рідини і газу, передбачає розв’язання рівнянь руху в’язких середовищ Нав’є-Стокса. Наприклад, при вивченні ламінарного руху ньютонівських рідин і газів в циліндричних трубах круглого поперечного перерізу розподіл швидкостей за його радіусом знаходять прямим інтегруванням рівняння Нав’є-Стокса за умов стаціонарної і стабілізованої течії. Інтеграл рівняння дає відомий параболічний закон розподілу швидкості в залежності від радіусу труби — так звану «параболу Пуазейля».

Разом з тим, при розв’язанні ряду технічних задач, особливо в аеродинаміці, теплофізиці і термодинаміці необоротних процесів, достатньо ефективними є менш поширені варіаційні методи. Початок таким методам було закладено Г. Галілеєм і запропонованою та розв’язаною в 1696 р. І. Бернуллі класичної «задачі про брахистохрону». Загальні методи варіаційного числення розроблялися Л. Ейлером, Г. В. Лейбніцем, Я. Бернуллі, Ж. Лагранжем, І. Ньютоном, Г. Лопіталем [1]. Стосовно механіки рідини і газу, найбільша увага дослідників при застосуванні варіаційних методів приділялася, головним чином, розв’язанню зовнішньої задачі. Внутрішня задача дослідження процесів, найбільш характерних для теплообмінних установок, гідравлічних систем, апаратів хімічної промисловості тощо на практиці, традиційно, як правило, вирішується або чисельними методами інтегрування диференціальних рівнянь процесу на базі широко поширених програмних продуктів, або наближеними, інженерними методами (напівемпіричними і чисто експериментальними).

Мета даної роботи полягає в тому, щоби показати ефективність природнього варіаційного методу на прикладі розв’язання задачі побудови профілю швидкості в поперечному перерізі круглої труби при ламінарному русі рідини. В основу методу покладено відому з термодинаміки незворотних процесів теорему І. Пригожина: виробництво ентропії системою, яка знаходиться у стані, близькому до рівноважного, є мінімальним [2]. В нашому випадку це принцип мінімальної дисипації енергії, яка відбувається при типово незворотному процесі течії в’язкої рідини, коли більша частина роботи сил внутрішнього тертя переходить в теплову енергію і розсіюється.

**Постановка задачі.**

Ставиться задача знайти такий профіль швидкості  ізотермічного, стаціонарного і стабілізованого потоку ньютонівської рідини в трубі, який доставляє мінімум деякому функціоналу — інтегралу, що характеризує секундний потік енергії в результаті дисипації і відповідний приріст ентропії за рахунок роботи сил в’язкого тертя. Потрібно побудувати такий інтеграл, мінімізувати його та отримати шуканий закон .

**Розв’язання задачі.**

Виділимо в ламінарному потоці рідини елементарний об’єм у вигляді циліндра довільного радіусу *r* і довжиною *dx* (рис. 1).

Рис. 1. Розрахункова схема.

Якщо  — дотичне напруження тертя, то елементарна потужність сили в’язкого тертя, що діє на бічну поверхню виділеного циліндричного елемента, очевидно, дорівнює , де  характеризує швидкість деформації зсуву. При віднесенні цієї величини до одиниці об’єму виділеного елемента рідини маємо

.

Отримана елементарна об’ємна щільність потужності сили тертя з термодинамічної точки зору призводить до деградації механічної енергії і зростання ентропії. Переходячи до сумарного потоку енергії дисипації з урахуванням всього поперечного перерізу труби і закону тертя Ньютона де  — динамічний коефіцієнт в’язкості, згідно з варіаційною постановкою задачі приходимо до функціоналу дисипації енергії

. (1)

Необхідно дослідити на екстремум отриманий функціонал за наступних граничних умов:  при ;  при .

Підінтегральною функцією виразу (1) є , тому рівняння Ейлера-Лагранжа, що виражає необхідну умову екстремуму інтегралу (1), зводиться до виразу

. (2)

Підстановка в (2) функції  призводить до .

Розділяючи змінні і взявши невизначений інтеграл в наближенні 

маємо

.

Після визначення сталих *С*1 і *С*2 на підставі зазначених вище граничних умов остаточно отримаємо параболічний закон розподілу швидкості в трубі:

. (3)

Перевірка умови Лежандра підтверджує, що отриманий вираз (3) доставляє функціоналу (1) мінімум (), оскільки

.

Якщо врахувати, що , формула (3) отримує більш звичний вигляд, що відповідає відомому закону Хагена-Пуазейля розподілу швидкості в поперечному перерізі круглої труби при ламінарному русі в’язкої рідини:

.

**Висновок.**

Результати наведеного прикладу застосування екстремального методу розв’язання задачі течії в’язкого середовища доводить можливість і користь фізично обумовлених варіаційних підходів термодинаміки незворотних процесів до вирішення проблем опису закономірностей руху рідин і газів в каналах різного призначення тепломасообмінних і пневмогідравлічних установок і систем.

**Література**

1. Schechter R.S. The variational method in engineering. New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney. McGraw-Hill Book Company. 1967. 287 p.

2. Kondepudi Dilip, Prigogine Ilya. Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures, 2nd Edition (Coursesmart). Chichester, New York, Toronto, Singapore. Publisher John Wiley @ Sons. 2014. 560 p.